Задача Діріхле для рівняння Пуассона. Формули Гріна. Функція Гріна

У цій лекції розглянемо межову задачу Діріхле для рівняння Пуассона:

$$\Delta\varphi(x,y,z)=\rho(x,y,z)\,,\;\;(x,y,z)\in D\,; \tag{1}$$

$$\varphi(x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in\partial D}=0\,. \tag{2}$$

У рівнянні Пуассона (1) $\Delta\equiv\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, D - область у тривимірному просторі, ∂D - кусково-гладка поверхня, межа області D. Задача (1), (2) виникає у фізиці при знаходженні електростатичного поля, створеного просторово розподіленим зарядом щільності $\rho(x,y,z)$ в екранованій області D.

Основою методу функції Гріна є знаходження відгуку на точкову дію, а потім використання методу суперпозиції. Тому розглянемо потенціал поля $G(x,y,z,x',y',z')$, що створюється точковим одиничним зарядом, розміщеним в точці $(x',y',z')\in D$:

$$\Delta G(x,y,z,x',y',z')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\,,\;\;(x,y,z)\in D\,; \tag{1'}$$

$$G(x,y,z,x',y',z')\big|_{(x,y,z)\in\partial D}=0\,. \tag{2'}$$

З курсу фізики відомо, що розв'язок рівняння (1') буде визначатися законом Кулона (можна перевірити прямою підстановкою в рівняння), але при цьому потрібно врахувати невизначеність потенціалу, тобто:

$$G(x,y,z,x',y',z')=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}+g(x,y,z,x',y',z')\,,$$

де $g(x,y,z,x',y',z')$ - гармонічна функція, тобто

$$\Delta g(x,y,z,x',y',z')=0\,,\;\;(x,y,z)\in D\,. \tag{3}$$

З межових умов (2') отримаємо, що

$$g(x,y,z,x',y',z')\big|_{(x,y,z)\in\partial D}=-\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\Bigg|_{(x,y,z)\in\partial D}\,. \tag{4}$$

Якщо б ми знали розв'язок задачі (3) і (4), то автоматично знали б функцію Гріна $G(x,y,z,x',y',z')$.

Визначення. Функція $G(x,y,z,x',y',z')$ називається функцією Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1) функція $G(x,y,z,x',y',z')$ як функція x,y,z задовольняє співвідношенням (1`) і (2`);

2) в області D функція $G(x,y,z,x',y',z')$ допускає вигляд (4), де $g(x,y,z,x',y',z')$ – гармонічна всюди в області D функція.

Для побудови розв'язку вихідної задачі Діріхле нам будуть потрібні дві формули. Нехай $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ - двічі неперервно диференційовані в області D і один раз неперервно диференційовані на межі ∂D функції. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)=u_x v_x+u_y v_y+u_z v_z+u\Delta v\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}-v\frac{\partial u}{\partial z}\right)=u\Delta v-v\Delta u\,,$$

то, використовуючи формулу Гаусса-Остроградського $\iiint\limits_D div\mathbf{F}dxdydz=\iint\limits_{\partial D}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, матимемо:

$$\iint\limits_{\partial D}u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}dS=\iiint\limits_D(u_x v_x+u_y v_y+u_z v_z+u\Delta\, v)dxdydz\ ; \tag{5}$$

$$\iint\limits_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dS=\iiint\limits_D(u\Delta v-v\Delta u)dxdydz\,. \tag{6}$$

Пояснення формул (5) і (6): У (3) $\mathbf{F}=u\nabla v$, у (4) $\mathbf{F}=u\nabla v-v\nabla u$, $\vec{n}$ – зовнішня до ∂D нормаль. Формули (5), (6) **називаються першою та другою формулами Гріна**. За допомогою формул Гріна можна довести теорему.

Теорема. Якщо функція $u(x,y,z)$ є двічі неперервно диференційованою в області D і один раз неперервно диференційованою на межі ∂D, то має місце формула

$$Cu(P)=\iint_{\partial D}\left[\frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial u(Q)}{\partial \vec{n}}-u(Q)\frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)\right]dS-\iiint_{D}\frac{\Delta u(Q)}{r_{PQ}}dx'dy'dz', \qquad (7)$$

де $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x',y',z')$, $\frac{1}{r_{PQ}}=\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$, а

$$C=\begin{cases}4\pi, & \text{якщо } P\in D,\\ 2\pi, & \text{якщо } P\in \partial D,\\ 0, & \text{якщо } P\in \mathbb{R}^3\setminus \bar{D}.\end{cases}$$

Доведення цієї теореми опустимо. Лише відзначимо, що ця теорема залишається справедливою, якщо замість $\frac{1}{r_{PQ}}$ взяти $\frac{const}{r_{PQ}}+q(P,Q)$, $\Delta_Q q(P,Q)=0$, тобто теорема буде справедливою для функції Гріна.

Застосовуючи формулу (7) до $G(x,y,z,x',y',z')$ і $u(x,y,z)$, розв'язок задачі (1), (2) можна записати наступним чином:

$$u(x,y,z)=-\iiint_{D}\rho(x',y',z')G(x,y,z,x',y',z')dx'dy'dz', \quad (x,y,z)\in D. \qquad (8)$$

Побудова функції $g(x,y,z,x',y',z')$ - окрема задача, яку розберемо на практиці.