Задача Коші для струни. Формула Даламбера. Поширення хвиль

Розглянемо вільні коливання нескінченної струни

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \tag{1}$$

Звісно, в реальності нескінченної струни не існує, але така абстракція є досить виправданою для довгої струни, коливання поблизу кінців якої нас з якоїсь причини не цікавлять. Нехай коливання виникають під дією збурення струни у початковий момент часу:

$$u(0,x)=\phi(x),\quad u_t(0,x)=\psi(x),\quad x\in(-\infty;+\infty)\,. \tag{2}$$

Як ми вже знаємо з попередніх лекцій, сукупність рівнянь (1) і (2) – задача Коші. Для її розв'язування використаємо загальний розв'язок рівняння (1)

$$u(x,t)=f_1(x-at)+f_2(x+at)\,. \tag{3}$$

Підставимо (3) у початкові умови (2):

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\phi(x); \\ -af_1'(x)+af_2'(x)=\psi(x). \end{cases} \tag{4}$$

Проінтегрувавши друге рівняння, матимемо

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\phi(x), \\ -f_1(x)+f_2(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz+C,\quad C=const. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\phi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz-C \;\text{ і }\; f_2(x)=\frac{1}{2}\phi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz+C\,.$$

Тому

$$u(x,t)=f_1(x-at)+f_2(x+at)=\frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\psi(z)dz+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz$$

або

$$u(x,t)=\frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz\,. \tag{5}$$

Вираз (5) називають формулою Даламбера. Якщо функції $\phi(x)$ і $\psi(x)$ є двічі неперервно диференційованими функціями, то (5) є розв'язком задачі Коші (1), (2).

Розглянемо збурення струни, що задається початковими умовами:

$$u(0,x)=\phi(x),\quad u_t(0,x)=0,\quad x\in(-\infty;+\infty)\,. \tag{2a}$$

Тоді $u(x,t)=\dfrac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2}$ - розв'язок задачі Коші (1), (2). Функція $\phi(x-at)$ має всюди на прямих $x=\pm at+C_1$ значення $\phi(C_1)$. Використовуючи цей факт, можна запропонувати простий графічний метод побудови форми струни у будь-який момент часу (рис.1, початкова форма струни – блакитна крива, у довільний момент часу – червона).

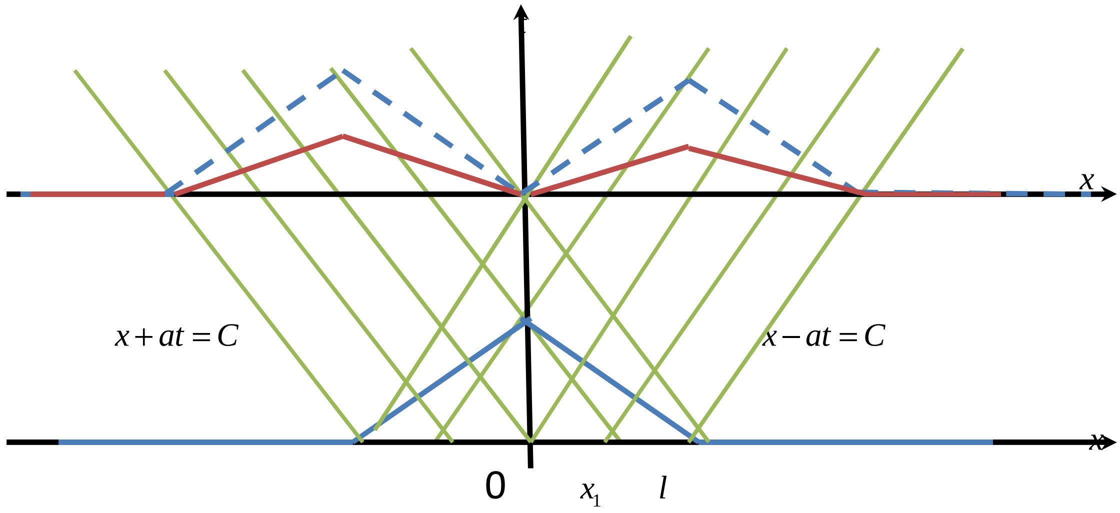

Рис.1.

Якщо скористатися рис.1, то для точки $x_1 \in (0,l)$ матимемо

$$u(x_1,t)=\begin{cases} \dfrac{\phi(x_1-at)+\phi(x_1+at)}{2}, & 0<t<\dfrac{l-x_1}{a}, \\ \dfrac{1}{2}\phi(x_1-at), & \dfrac{l-x_1}{a}\le t\le \dfrac{l+x_1}{a}, \\ 0, & t>\dfrac{l+x_1}{a}. \end{cases}$$

З рис.1 також можна зробити висновок, що функція від аргументу $x-at$ відповідає за поширення хвилі вздовж струни вправо, а функція від аргументу $x+at$ - за поширення хвилі вздовж струни вліво.

Більше про поширення хвиль у нескінченій струні можна дізнатися з книги

Л.В. Курпа, Г.Б. Лінник Рівняння математичної фізики (стор 188-203)