Квадратична форма та приведення її до канонічного вигляду

Визначення 1. Квадратичною формою називається функція багатьох змінних виду

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{n1}x_4x_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_nx_n, \quad (1)$$

де коефіцієнти a_{ij} — дійсні числа, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ - змінні.

Числа a_{ij} утворюють матрицю коефіцієнтів $\mathbf{A}$, змінні - вектор $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

тому квадратичну форму можна записати також у вигляді добутку матриць:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (2)$$

Очевидно, що недіагональні елементи матриці $\mathbf{A}$ визначені неоднозначно. У подальшому кожну квадратичну форму вважатимемо симетричною, тобто такою, що $a_{ij} = a_{ji}$.

Визначення 2. Квадратична форма $Q(\mathbf{x})$ називається додатно (від'ємно) визначеною, якщо для всіх дійсних значень $\mathbf{x} \neq 0$ виконується нерівність $Q(\mathbf{x}) > 0$ ($Q(\mathbf{x}) < 0$), і не від'ємною (не додатною), якщо для всіх дійсних значень $\mathbf{x} \neq 0$ виконується нерівність $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ ($Q(\mathbf{x}) \leq 0$). Якщо квадратична форма $Q(\mathbf{x})$ може набувати від'ємних і додатних значень, то вона називається невизначеною.

Якщо зробити лінійну заміну змінних, то очевидно, що квадратична форма змінить свій вигляд, але залишиться квадратичною формою від нових змінних. Для подальшого матеріалу нам важливо буде навчитися перетворювати форму (1) до канонічного вигляду, тобто до форми, матриця коефіцієнтів якого не містить недіагональних елементів, а діагональні елементи дорівнюють власним значенням вихідної матриці коефіцієнтів.

Приведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

Метод Лагранжа (метод послідовного виділення в квадратичній формі повних квадратів).

При реалізації цього методу можливі два випадки:

А) існує хоча б один з коефіцієнтів a_{ii} відмінний від нуля. Нехай цим коефіцієнтом є a_{11} (якщо це не так, то можна добитись цього перестановкою змінних), тоді перетворюємо квадратичну форму наступним чином:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(a_{11}x_1^2 + 2\,a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n\right) + Q_1(x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right)^2 - \frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right)^2 + Q_1(x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + Q_2(x_2, \ldots, x_n),$$

де $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$, $Q_{1,2}(x_2, \ldots, x_n)$ - квадратичні форми від $n-1$ змінного.

Далі процедура виділення повного квадрату і заміни змінних продовжується до тих пір, поки не отримаємо квадратичну форму в канонічному вигляді.

Б) Всі коефіцієнти $a_{ii} = 0$ (квадратична форма вироджена), але є недіагональний коефіцієнт $a_{ij} \neq 0$. Нехай $a_{12} \neq 0$, тоді заміна $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$, … , $x_n = y_n$ дозволяє звести цей випадок до випадку А).

Метод ортогональних перетворень.

Крок 1. Знаходимо власні значення і вектори матриці $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Крок2. Нехай після виконання першого кроку у нас буде n дійсних власних значень $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ і n власних векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Заміна змінних:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

У результаті, квадратична форма (1) набуде вигляду

$$Q(\mathbf{T}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\mathbf{T}^T\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2. \tag{4}$$

Теорема 1. Нехай $\mathbf{A}$ — дійсна симетрична матриця коефіцієнтів квадратичної форми (1). $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - власні числа матриці $\mathbf{A}$. Тоді виконуються такі властивості:

1. Квадратична форма $Q(\mathbf{x})$ є додатно (від'ємно) визначеною, якщо всі власні числа $\lambda_j > 0$ $(\lambda_j < 0)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

2. Квадратична форма $Q(\mathbf{x})$ є невід'ємною (недодатною), якщо всі власні числа $\lambda_j \geq 0$ $(\lambda_j \leq 0)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

3. Якщо власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ мають різні знаки, то квадратична форма є невизначеною.

Теорема 2. *(Критерій Сільвестра)*. Для того, щоб квадратична форма з матрицею $\mathbf{A}$ була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори $\mathbf{A}$ були додатні. Для того, щоб квадратична форма з матрицею $\mathbf{A}$ була від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб знаки головних мінорів $\mathbf{A}$ чергувалися, починаючи з від'ємного.