Рівняння малих поперечних коливань струни

У багатьох музичних інструментах з давніх часів використовують струни – тонкі проволоки, виготовлені з металу, сухожиль тварин, капронових ниток тощо. Натягуючи такий об'єкт (струну) та вдаряючи по ньому молоточком, відтягуючи її зачепом або чинячи якусь іншу дію, як правило, можна почути звук. Справа в тім, що струна коливається і збурює у повітрі хвилі, які діють на барабану перетинку в нашому вусі (рис.1).

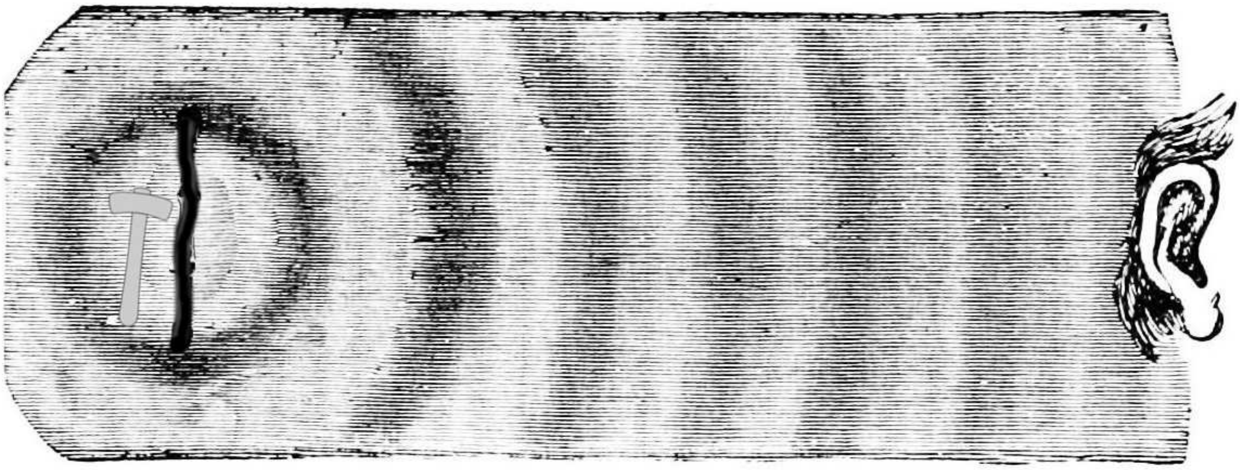

Рис. 1.

Висота звуку (назва ноти і октави) залежить від довжини і матеріалу струни, а також точки, в якій відбувся удар, зачіп або інша дія. Сподіваюсь, що Вам, друзі, було б цікаво передбачити звуки, які «виконуватиме» та чи інша струна ще до того, як ми її зачепимо. Власне цим передбаченням (та іншими передбаченнями) ми будемо займатися в курсі методів математичної фізики. Ми будемо вивчати математичні методи, які дозволять встановити акустичні (звукові) та інші властивості різних фізичних об'єктів до того, як ми матимемо справу з самими об'єктами.

Будемо вважати, що струна завжди коливається в одній площині. Вздовж незбуреної струни направимо вісь Ox, початок якої розмістимо в лівому (по відношенню до напрямку осі Ox) кінці (рис.2).

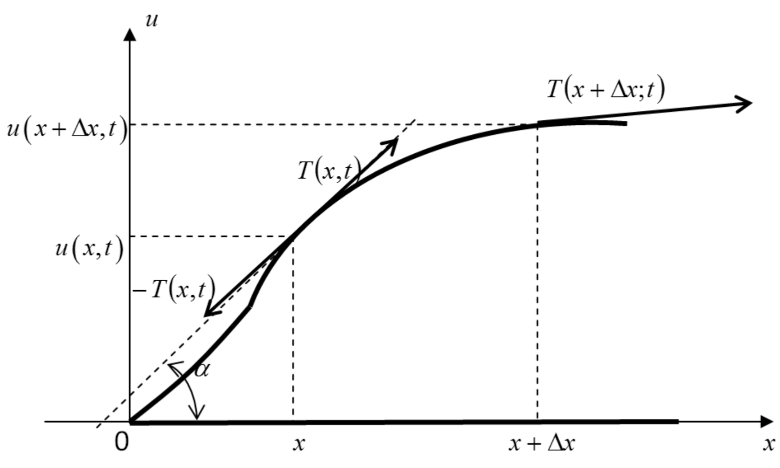

Рис.2.

Перпендикулярно до незбуреної струни у площі її коливань направимо вісь Ou так, щоб координатна система Oxu була правою (рис.2). З великою точністю можна припустити, що струна здійснює поперечні коливання, тоді величиною відхилення струни від положення рівноваги в точці x у час t є $u(x,t)$.

Виділимо зі струни невеличку ділянку між точками x і $x+\Delta x$. Решту струни можна замінити ефективними пружною силою $T(x,t)$– натягом струни у точках x і $x+\Delta x$ (рис.2). Обмежуючись розглядом лише малих коливань струни, будемо нехтувати величинами порядку мализни в порівнянні з $tg\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$. У такому наближенні будь-яка ділянка струни $[a,b]$ після відхилення від положення рівноваги не змінює своєї довжини, тому що

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}dx \approx \int_a^b \left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}dx = b-a.$$

Струни, як правило, легко змотуються у кільце, тому припустимо, що струна не чинить опору згину. Тоді її натяг $T(x,t)$ в точці x у час t направлений по дотичній до струни у точці x (рис.2).

На елемент струни $(x, x+\Delta x)$ діє сила натягу $T(x+\Delta x,t)-T(x,t)$, і перпендикулярна до вісі Ox зовнішня сила щільності $F(x,t)$. Згідно з другим законом Ньютона, сума цих сил повинна дорівнювати добутку маси $\rho\Delta x$ (ρ - лінійна щільність струни, довжина струни і її частин не змінюється) елемента струни на його прискорення. Проектуючи цю векторну рівність на вісі, будемо мати

$$Ox: \quad T\cos\alpha\big|_{x+\Delta x} - T\cos\alpha\big|_x = 0;$$

$$Ou: \quad T\sin\alpha\big|_{x+\Delta x} - T\sin\alpha\big|_x + F(x,t)\Delta x = \rho(x)\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \qquad (1)$$

У рамках нашого наближення

$$\sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha \approx \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \cos\alpha \approx 1,$$

тому з першого рівняння системи (1) матимемо, що $T(x,t)=T_0=const$, а з другого отримаємо таке співвідношення

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=T_0\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]+F(x,t)=$$

$$=T_0\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x+o(\Delta x)\right]+F(x,t).$$

Застосовуючи границю $\Delta x\to 0$, отримуємо рівняння коливання струни

$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F$ або $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f$, де $f=\frac{F}{\rho};\ a^2=\frac{T_0}{\rho}$ - сталі. (2)

При $F(x,t)\neq 0$ коливання струни називаються *вимушеними*, а при $F(x,t)=0$ - *вільними*.