Класичне визначення ймовірності

Що ж таке ймовірність чи можна її виміряти? “Бог не грає у кості!” - загальновідомий вислів Альберта Ейнштейна, який стосувався квантової механіки, але є доречним також для випадкових подій. Про які закономірності можна говорити, якщо результат того чи іншого експеременту є випадковим? Але справа у тім, що існують експерименти, усі можливі результати яких відомі ще до їхнього проведення. У такому разі, ми можемо очікувати появу тої чи іншої події. Більше того, виявилося, що якщо повторювати експеримент достатньо довго, то події (результат експерименту) відбуваються з частотою близькою до якоїсь сталої величини (у кожної події до своєї сталої). Наприклад, якщо ми достатньо довго кидаємо монету, то приблизно в половині випадків буде випадати “герб”, а в половині - “решка”. Якщо звернутися до підкидування кості, то виявиться, що частота появи “1”, “2”, “3”, “4”, “5” або “6” близька до ⅙. Пропоную перевірити мої слова, зробивши вказані експерименти з кидання монети і кості самостійно. Частота появи того чи іншого результату експерименту визначається як відношення числа появ потрібного Вам результату до загальної кількості проведених експериментів. Очевидно, що в азартних іграх закономірності частоти появи події мали величезне значення, адже вони дозволяли гравцям отримувати не тільки задоволення від гри, але й надавали перевагу над суперниками, а, отже, й прибутки.

Логічно було б граничне значення частоти появи тої чи іншої події взяти за ймовірність цієї події, але проблема полягає в тому, що ніхто не може повторити експеримент нескінченну кількість разів. Але виявилося, що в усіх експериментах частота появи події близька до відношення числа сприятливих результатів експерименту до загальної кількості можливих результатів. Наприклад, в експерименті з киданням монети поява “герба” можлива лише в одному випадку, а загальна кількість можливих результатів кидання два - випадіння “герба” і випадіння “решки”. Таким чином, ймовірність випадіння “герба” при одному киданні становить ½.

Визначення 1. Розглянемо простір елементарних подій $\Omega = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ якогось експерименту. Ймовірність $P(A)$ події A є

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1)$$

де m - кількість елементарних подій, сприятливих події A.

Головною проблемою застосування формули (1) є правильне встановлення чисел m і n. В великій кількості випадків для встановлення m можна використовувати формули комбінаторики.

1. Якщо подія полягає у впорядкованому виборі якоїсь сукупності певних k об’єктів з N так, щоб серед цих k на певних місцях були задані наперед s об’єктів, то (розміщення без повторень)

$$m = A_{N-s}^{k-s} = \frac{(N-s)!}{(N-s-k)!}, \qquad n = A_N^k = \frac{N!}{(N-k)!} \quad . \qquad (2)$$

2. Якщо подія полягає у впорядкованому виборі якоїсь сукупності певних k об’єктів з N так, щоб серед цих k на певних місцях були задані наперед s об’єктів, і при цьому об’єкти можуть повторюватися, то (розміщення з повтореннями)

$$m = \overline{A}_N^{k-s} = N^{k-s}, \qquad n = \overline{A}_N^k = N^k \; . \qquad (3)$$

3. Якщо подія полягає у невпорядкованому виборі якоїсь сукупності певних k об’єктів з N так, щоб серед цих k були задані наперед s об’єктів, то (сполучення без повторень)

$$m = C_{N-s}^{k-s} = \frac{(N-s)!}{(N-k)!(k-s)!}, \qquad n = C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!} \; . \qquad (4)$$

4. Якщо подія полягає у невпорядкованому виборі якоїсь сукупності певних k об’єктів з N груп заданих об’єктів так, щоб серед цих k були задані наперед s об’єктів, то (сполучення з повтореннями)

$$m = \overline{C}_N^{k-s} = C_{N+k-s-1}^{k-s} = \frac{(N+k-s-1)!}{(k-s)!(N-1)!}, \qquad n = \overline{C}_N^k = C_{N+k-1}^k = \frac{(N+k-1)!}{k!(N-1)!} \; . \qquad (5)$$

5. Якщо подія полягає у впорядкованому виборі у певному порядку N об'єктів з N різних заданих так, щоб серед цих k були розміщені у заданому порядку s об'єктів, то (перестановки без повторень)

$$m = (N - s)!\,, \qquad n = N! \tag{6}$$

6. Якщо подія полягає у впорядкованому виборі якоїсь сукупності певних N об'єктів з N заданих, серед яких N_1 - об'єктів першого типу, N_2 - об'єктів другого типу, … , N_k - об'єктів $k-$го типу, так, що s_1 - об'єктів першого типу, s_2 - об'єктів другого типу, … , s_k - об'єктів $k-$го типу займають у виборі певні місця, то (перестановки з повтореннями)

$$m = \frac{(N-s_1-s_2-...-s_k)\,!}{(N_1-s_1)!(N_2-s_2)!\cdots(N_k-s_k)!}\,, \quad n = \frac{N!}{N_1!N_2!\cdots N_k!}\,. \tag{7}$$