Рівняння теплопровідності

Зараз займемося питанням опису процесу зміни теплового стану тіла. Нехай тіло, в якому відбувається теплоперенос - циліндричний стрижень довжини L. Будемо вважати діаметр (характерний розмір поперечного перерізу) стрижня значно меншим його довжини, а бічну поверхню теплоізольованою. Тоді товщиною стрижня можна знехтувати. Температура $T(x_0, t)$ залежить лише від положення точки x_0 вздовж стрижня (рис.1) і часу t.

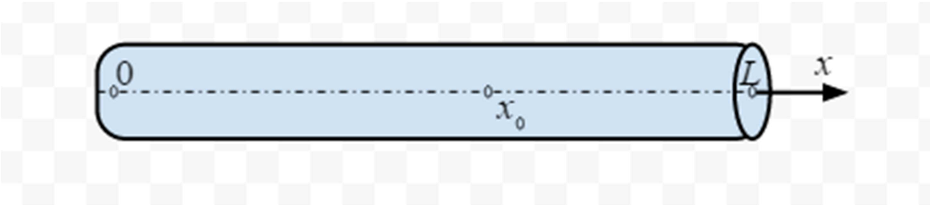

Рис.1.

У 1822 році Жозеф Фур’є експериментально встановив важливий закон поширення тепла у нерівномірно нагрітому тілі. Цей закон згодом назвали на його честь.

Закон Фур’є. Якщо температура тіла розподілена нерівномірно, то у ньому виникають теплові потоки, які направлені від більш нагрітих ділянок тіла до менш нагрітих. Кількість тепла dQ, що протікає через елемент площею $d\sigma$ за час dt, дорівнює

$$dQ = -k\frac{\partial T}{\partial n}d\sigma dt. \tag{1}$$

У випадку тонкого стрижня формула (1) має вигляд:

$$dQ = -k\frac{\partial T}{\partial x}dt. \tag{1.1}$$

k - коефіцієнт теплопровідності, $\frac{\partial T}{\partial n}$ - похідна по нормалі до елементу $d\sigma$. При малих значеннях $\frac{\partial T}{\partial n}$ коефіцієнт теплопровідності не залежить від температури.

У 1701 році в "Philosophical Transactions" Ньютон опублікував статтю "Scala graduum caloris et frigoris" (Шкала ступенів теплоти і холоду). У цій статті був уперше сформлюванний закон теплообміну: Кількість тепла, яке нагріте залізо віддає в заданий час навколишнім холодним тілам, тобто яке залізо втрачає в продовж заданого часу, пропорційне всій теплоті заліза, тому якщо часи охолодження приймати рівними, то теплоти будуть в геометрічній прогрессії. Зараз цей закон формулюють трохи по-іншому.

Закон Ньютона-Ріхтмана. Кількість тепла Q, що протікає за одиницю часу у зовнішнє середовище через поверхню тіла площею σ, дорівнює

$$Q = \sigma h(T - T_0), \tag{2}$$

де T_0 - температура зовнішнього середовища, h - коефіцієнт теплообміну.

Виділимо у стрижні елемент $(x, x+dx)$ (коротко dx) і запишемо рівняння теплового балансу для нього. Цей елемент dx будемо вважати достатньо малим, щоб вважати, що в його межах температура приблизно є сталою. Нехай за проміжок часу Δt елемент dx нагрівся на $\Delta T = T(x, t+\Delta t) - T(x,t)$. Кількість тепла, що елемент поглинув при цьому становить:

$$\Delta Q_1 = \int_x^{x+dx} c(x)\rho(x)[T(x, t+\Delta t) - T(x,t)]\, dx,$$

де $c(x)$ – питома теплоємність, а $\rho(x)$ – щільність стрижня.

Між елементом dx та іншою частиною стрижня відбувається теплообмін за законом Фур'є. Через грань x за час Δt вливається тепла:

$$\Delta Q_2 = -\int_t^{t+\Delta t} k(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} dt.$$

Через грань $x + dx$ за час Δt –

$$\Delta Q_3 = \int_t^{t+\Delta t} k(x+dx)\frac{\partial T(x+dx,t)}{\partial x} dt.$$

Знак «+» перед інтегралом пов’язаний з тим, що внутрішня до грані $x + dx$ нормаль направлена проти осі Ox.

Всередині елемента dx можуть бути джерела тепла щільності $f(x,t)$. Це можуть бути електричні струми, хімічні реакції та інше. За час Δt від джерел d dx надійде тепла

$$\Delta Q_4 = \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+dx} f(x,t) dx dt.$$

Все тепло, що поступає всередину елемента dx йде на його нагрів, тобто

$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4$, тобто

$$\int_{x}^{x+dx} c(x)\rho(x)[T(x,t+\Delta t)-T(x,t)]\,dx =$$

$$= \int_{t}^{t+\Delta t} \left[k(x+dx)\frac{\partial T(x+dx,t)}{\partial x} - k(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right] dt +$$

$$+ \int_{t}^{t+\Delta t}\int_{x}^{x+dx} f(x,t)dxdt.$$

Враховуючи, що для двічі неперервно диференційованої по координаті і один раз за часом функції $T(x,t)$ та неперервно диференційованої по координаті $k(x)$ справедливі співвідношення (тема: формула Тейлора)

$$T(x,t+\Delta t)-T(x,t) = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\Delta t + o(\Delta t);$$

$$k(x+dx)\frac{\partial T(x+dx,t)}{\partial x} - k(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right)dx + o(dx),$$

матимемо

$$\int_{x}^{x+dx} c(x)\rho(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\Delta t\,dx + o(\Delta t dx) =$$

$$= \int_{t}^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right)dxdt + \int_{t}^{t+\Delta t}\int_{x}^{x+dx} f(x,t)dxdt.$$

Застосуємо теорему про середнє значення, тоді

$$c(x+\theta_1 dx)\rho(x+\theta_1 dx)\frac{\partial T(x+\theta_1 dx,t)}{\partial t}\Delta t dx + o(\Delta t dx) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T(x,t+\theta_2\Delta t)}{\partial x}\right)\Delta t dx \ + f(x+\theta_3 dx, t+\theta_4\Delta t)\Delta t dx.$$

Ділячи останній вираз на $\Delta t dx$ і переходячи до границі при $dx \to 0$ і $\Delta t \to 0$, отримаємо рівняння:

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t), \qquad (3)$$

яке називається рівнянням теплопровідності для тонкого стрижня.