Основні визначення. Постановка задач математичної фізики. Початкові і межові умови

Визначення 1. Співвідношення між незалежними змінними $x_1, x_2, \dots, x_k, t$ невідомою функцією $u(x_1, x_2, \dots, x_k, t)$ та її частинними похідними називається диференціальним у частинних похідних.

У попередніх двох лекціях ми вивели два таких рівняння: рівняння малих поперечних коливань струни

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \text{ де } a^2 = \frac{T_0}{\rho} \text{ - стала} \qquad (1)$$

та рівняння теплопровідності

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right) + g(x,t). \qquad (2)$$

Вони є рівняннями, у яких невідомими є функції двох змінних: $u(x,t)$ - відхилення точок струни від положення рівноваги; $T(x,t)$ – температура точок стрижня.

Визначення 2. Диференціальне рівняння називається рівнянням n-го порядку, якщо воно містить хоча б одну частинну похідну n-го порядку і не містить похідних вищого порядку.

Очевидно, що (1) і (2) є диференціальними рівняннями в частинних похідних другого порядку. Розв’язати ці рівняння – означає знайти функції $u(x,t)$ і $T(x,t)$.

У загальному випадку рівняння n-го порядку має вигляд

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_k, t, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_k}, u_t, \dots, D^{|\alpha|}u(x,t)\right) = 0, \qquad (3)$$

де $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ - цілочисловий мультиіндекс з координатами $\alpha_i \ge 0$, $|\alpha| = n = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i$, а $D^{|\alpha|}u(x,t) = u_{t^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k}} = \dfrac{\partial^n u(x_1, x_2, \dots, x_k, t)}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_1^{\alpha_2} \cdots \partial x_1^{\alpha_k}}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Визначення 3. Диференціальне рівняння у частинних похідних (3) називається лінійним, якщо воно лінійне відносно невідомої функції і всіх її частинних похідних.

Лінійне рівняння 2-го порядку має вигляд

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_k, t)\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_k, t)}{\partial x_i \partial x_j} +$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\left(b_i(x_1, x_2, \dots, x_k, t)\frac{\partial}{\partial x_i}\right.$$
$$\left.+ c_i(x_1, x_2, \dots, x_k, t)\frac{\partial^2}{\partial t \partial x_i}\right)u(x_1, x_2, \dots, x_k, t)$$
$$+\left(d(x_1, x_2, \dots, x_k, t)\frac{\partial}{\partial t} + g(x_1, x_2, \dots, x_k, t)\right)u(x_1, x_2, \dots, x_k, t)$$
$$= f(x_1, x_2, \dots, x_k, t)$$

Або

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j}(x,t) + \sum_{i=1}^{k}\left(b_i(x,t)u_{x_i}(x,t) + c_i(x,t)u_{tx_i}(x,t)\right) + d(x,t)u_t(x,t)$$
$$+ g(x,t)u(x,t) = f(x,t). \quad (4)$$

Визначення 4. Якщо у рівнянні (4) $f(x,t) = 0$, то воно називається лінійним однорідним. Якщо коефіцієнти a_{ij}, b_i, c_i, d, g є сталими , то рівняння (4) до того ж називається лінійним рівнянням з сталими коефіцієнтами.

Визначення 5. Диференціальне рівняння називається квазілінійним, якщо воно лінійне відносно похідних найвищого порядку.

Визначення 6. Всяка n разів неперервно-диференційована в області визначення рівняння (3) функція $\phi(x_1, x_2, \dots, x_k, t)$, що при підстановці у (3) перетворює його в тотожність за незалежними змінними, називається регулярним розв'язком рівняння (3).

Ще з курсу звичайних диференціальних рівнянь відомо, що загальний розв'язок диференціального рівняння містить невизначені константи, кількість яких співпадає з порядком рівняння. Для диференціальних рівнянь у частинних похідних також можна розглядати загальний розв'язок, але він матиме не невизначені сталі, а функції.

Однією з важливих задач математичної фізики є знаходження загального розв'язку диференціальних рівнянь у частих похідних (д.р. у ч.п.), тобто такої функції, що задовольняє д.р. з ч.п., з якої можна вибором виду невизначених функцій отримати будь-який розв'язок заданого д.р. у ч.п. за винятком лише окремих особливих розв'язків. У одному з наступних змістовних модулів розглянемо метод знаходження загального розв'язку рівняння (1).

Загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння не є функцією, що описує якийсь один реальний процес. Так само і розв'язки рівнянь коливання струни чи переносу тепла у стрижні. Очевидно, що д.р. у ч.п. не є єдиним математичним виразом, що моделює фізичне явище. Потрібні якісь додаткові умови, які допомогли встановити розв'язок задачі, що відповідає фізичному процесу.

Варто згадати, що будь-який дослідник починає слідкувати за процесом у певний момент часу t_0. Він може встановити стан струни або стрижня у цей момент часу за допомогою замірів. Наприклад, може визначити положення і швидкість точок струни та знайти температуру стрижня у початковий момент:

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad v(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \vartheta(x); \tag{1.1}$$

$$T(x,0) = \tau(x). \tag{2.1}$$

Умови (1.1) і (2.1) називаються **початковими умовами**. Очевидно, що з загальних розв'язків рівнянь (1) і (2) потрібно вибрати функції, які задовольняють (1.1) і (2.1). Якщо струна або стрижень необмежені, то сукупності рівнянь (1), (1.1) і (2), (2.1) називають **задачами Коші**. У наступному модулі розв'яжемо **задачу Коші** для нескінченної струни.

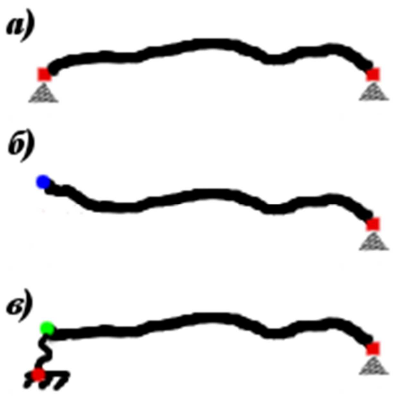

Рис.1.

В реальності струни музичних інструментів скінчені і їхні кінці, як правило, защемлені, тобто вони не рухаються (рис.1а). Також можна припустити, що вони (або хоча б один з них) є вільними або пружно закріпленими (рис.1б-в).

Математично умови на кінцях струни можна оформити за допомогою відомих фізичних законів:

a) якщо обидва кінці закріплені, то зміщення по осі Ou в точках $x = 0$ і $x = L$ будуть нульовими:
$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0; \tag{1.2.1}$$
b) якщо кінець $x = L$ закріплений, а кінець $x = 0$ вільний, то (оскільки сила реакції опору в кінці $x = 0$ є нульовою) зміщення по осі Ou повинні задовольняти умовам:
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad u(L,t) = 0; \tag{1.2.2}$$
c) якщо кінець $x = L$ жорстко закріплений, а кінець $x = 0$ пружно закріплений, то (оскільки сила пружності пружини пропорційна зміщенню кінця) зміщення по осі Ou повинні задовольняти умовам:
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - ku(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0. \tag{1.2.3}$$

Сукупність рівнянь (1), (1.1) і однієї з умов (1.2.і) є **межовою задачею** для струни. Ще **однією з важливих задач математичної фізики** є знаходження розв’язку цієї задачі. Далі буде зрозуміло, що цим розв’язком буде функція, яка описує коливання струни.

На кінцях нагрітого стрижня можуть бути різні умови теплообміну з зовнішнім середовищем :

a) якщо обидва кінці нагріті до T_1 і T_2:
$$T(0,t) = T_1, \qquad T(L,t) = T_2; \tag{2.2.1}$$
b) якщо обидва кінці теплоізольовані:
$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = 0; \tag{2.2.2}$$
c) якщо на обох кінцях відбувається конвективний теплообмін з тілами, нагрітими до температур T_1 і T_2 відповідно:

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} - k_1(T(0,t) - T_1) = 0, \qquad \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} - k_2(T(L,t) - T_2) = 0. \tag{2.2.3}$$

Сукупність рівнянь (2), (2.1) і однієї з умов (2.2.і) є **межовою задачею** для нагрітого стрижня.

Умови (1.2.і) і (2.2.і) називають межовими. Звісно, що умови, представлені тут не є єдино можливими.