Локальна і інтегральна теореми Лапласа

У випадках, коли формула Пуассона не може бути застосованою, використовують інше наближене співвідношення.

Локальна теорема Лапласа (формула Муавра-Лапласа). Нехай m – число появ події A у біноміальному експерименті $B(n,p)$. При $n \to \infty$ і $p \in (0;1)$ ймовірність

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ де } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}. \qquad (1)$$

Функція $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ називається функцією Гаусса. Формула (1) є ефективною при $p \geq 0,5$; $npq > 10$ або при $npq \geq 20$.

У деяких випадках нам потрібно знати ймовірність появи події від a до b разів. Для цього корисною є наступна теорема.

Інтегральна теорема Лапласа. Нехай m – число появ події A у біноміальному експерименті $B(n,p)$. При $p \in (0;1)$ і $a < b$ ймовірність

$$P_n(a,b) \approx \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \qquad (2)$$

де $\alpha = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}$, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\beta = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}$. Функція $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(x)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ називається функцією Лапласа або інтегралом ймовірностей.