Метод Фур'є для стаціонарної задачі теплопровідності

Розглянемо розподіл тепла в однорідному нескінченному циліндрі з прямокутним перерізом зі сторонами a і b. Вважатимемо, що у циліндрі встановився стаціонарний розподіл температур, а на його поверхні підтримується певний розподіл температур:

$$T_{xx}(x,y)+T_{yy}(x,y)=0\ , \tag{1}$$

$$T(x,0)=\varphi_1(x), T(x,b)=\varphi_2(x)\,, \tag{2}$$

$$T(0,y)=T(a,y)=0\,. \tag{3}$$

При цьому $\varphi(x)$ задовольняє умовам узгодженості

$$\varphi(0)=\varphi(a)=0. \tag{4}$$

Розв’язок задачі (1) – (3) будемо шукати у вигляді

$$T(x,y)=X(x)Y(y)\neq 0. \tag{5}$$

Використовуючи схему двох попередніх лецій, отримаємо:

$$Y''(y)+\lambda Y(y)=0, \tag{6}$$

$$\begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0; \\ X(0)=X(a)=0, \end{cases} \tag{7}$$

де λ – довільна стала.

Задача Штурма-Ліувілля (7) має власні значення

$$\lambda_n=-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, n=1,2,..., \tag{8}$$

а власні функції матимуть вигляд

$$X_n(x)=c_n\sin\frac{\pi n}{a}x,\quad c_n=\mathrm{const}. \tag{9}$$

З рівняння (6) отримаємо

$$Y_n(y)=b_n e^{\frac{\pi n y}{a}}+d_n e^{-\frac{\pi n y}{a}}, \quad b_n, d_n=\mathrm{const}. \tag{10}$$

Звідси, утворюючи добуток функцій (9) і (10), отримаємо функції, які задовольняють рівнянню (1) і межовим умовам (3)

$$T_n(x,y)=\left(A_n e^{\frac{\pi n y}{a}}+B_n e^{-\frac{\pi n y}{a}}\right)\sin\frac{\pi n}{a}x, \quad n=1,2,3,..., \tag{11}$$

З функцій (11) утворимо ряд

$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{\pi n y}{a}}+B_n e^{-\frac{\pi n y}{a}}\right)\sin\frac{\pi n}{a}x. \tag{12}$$

З межових умов (3), отримаємо

$$\begin{aligned} T(x,0)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n+B_n\right)\sin\frac{\pi n}{a}x=\varphi_1(x); \\ T(x,b)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{\pi n b}{a}}+B_n e^{-\frac{\pi n b}{a}}\right)\sin\frac{\pi n}{a}x=\varphi_2(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Оскільки $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ можна розвинути в ряд Фур'є лише одним способом

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{\pi n}{a}x; \qquad \varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin\frac{\pi n}{a}x,$$

$$\alpha_n=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi_1(x)\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx, \quad \beta_n=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi_2(x)\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx,$$

то отримаємо нескладну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів ряду (12)

$$\begin{cases} A_n+B_n=\alpha_n, \\ A_n e^{\frac{\pi n b}{a}}+B_n e^{-\frac{\pi n b}{a}}=\beta_n. \end{cases} \tag{14}$$