Метод Фур'є для задачі теплопровідності

Розглянемо процес розподілу тепла в однорідному стрижні довжиною l з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо початкова його температура дорівнює $\varphi(x)$, а на кінцях підтримується нульова температура:

$$T_t(x,t) = a^2 T_{xx}(x,t)\ , \tag{1}$$

$$T(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,l], \tag{2}$$

$$T(0,t) = T(l,t) = 0, \quad t \ge 0. \tag{3}$$

При цьому $\varphi(x)$ задовольняє умовам узгодженості

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0. \tag{4}$$

Розв’язок задачі (1) – (3) будемо шукати у вигляді

$$T(x,t) = \Xi(t) X(x) \ne 0. \tag{5}$$

Діючи по тій же схемі, що і в попередній лекції, матимемо

$$\Xi'(t) - a^2 \lambda \Xi(t) = 0, \tag{6}$$

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0; \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

де λ – довільна стала.

Задача Штурма-Ліувілля (7) має власні значення

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

а власні функції матимуть вигляд

$$X_n(x) = c_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \quad c_n = \mathrm{const}. \tag{9}$$

З рівняння (6) отримаємо

$$\Xi_n(t) = b_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}, \quad b_n = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Звідси, утворюючи добуток функцій (9) і (10), отримаємо функції, які задовольняють рівнянню (1) і межовим умовам (2)

$$T_n(x,t) = a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l} x\ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{11}$$

де a_n – довільні сталі. З функцій (11) утворимо ряд

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l} x\ . \tag{12}$$

З початкової умови (3), отримаємо

$$T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n}{l} x = \varphi(x)\ . \tag{13}$$

Звідки

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx. \qquad (14)$$

Теорема. Якщо функція $\varphi(x)$ є один раз неперервно диференційованою функцією на відрізку $[0,l]$ то ряд (13), де коефіцієнти a_n визначаються за формулою (14), в області можна почленно диференціювати довільну кількість разів як по x, так і по t при всіх значеннях x з відрізка $[0,l]$ і всіх додатних t. При цьому ряд визначає функцію, яка є розв’язком задачі (1) – (3).