Метод Фур'є для скінченої струни. Задача Штурма-Ліувілля

У цій лекції дослідимо процес вільних коливань однорідної струни довжини l

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l. \tag{1}$$

Будемо вважати, що струна є нерухомо закріпленої на кінцях

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

а в початковий момент часу $t = 0$

$$u(0,x) = \varphi(x), \ u_t\,(0,x) = \psi(x), \ 0 \leq x \leq l\ . \tag{3}$$

При цьому для узгодженості початкових (3) і межових умов (2) будемо вважати

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0\ . \tag{4}$$

Розв'язок межової задачі (1)-(3) для струни будемо шукати методом відокремлення змінних (або методом Фур'є), суть якого полягає у тому, що шукана функція $u(x,t)$ двох змінних представляється у вигляді добутку двох функцій однієї змінної, тобто

$$u(x,t) = T(t)X(x) \equiv 0. \tag{5}$$

Підставимо (5) у рівняння (1)

$$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x) \ \Rightarrow \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Помітимо, що ліва частина останньої рівності є функцією тільки від t, а права – тільки від x. Це означає, що якщо зафіксувати аргумент t в лівій частині рівності одержимо значення, якому дорівнюватиме права частина рівності для всіх x. Так само можна вибрати якесь фіксоване значення для x. Тоді для всіх значень t ліва частина останньої рівності матиме стале значення. Таким чином, остання рівність можлива тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda. \tag{6}$$

Підставивши (5) у межові умови (2), одержимо

$$T(t)X(0)=0,\quad T(t)X(l)=0.$$

$T(t)\neq 0,$ тому

$$X(0)=X(l)=0\,. \tag{7}$$

Поєднуючи (6) і (7), маємо

$$T''(t)-\lambda a^2 T(t)=0\,, \tag{8}$$

$$\begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0; \\ X(0)=X(l)=0. \end{cases} \tag{9}$$

Визначення. Значення параметра λ, при яких задача (9) має нетривіальні розв'язки, називаються власними значеннями, а відповідні ненульові розв'язки цієї задачі – власними функціями. Сама ж задача (9) називається задачею Штурма-Ліувілля.

Покажемо, що задача Штурма-Ліувілля може мати тільки дійсні власні значення. Припустимо супротивне, тобто нехай $\lambda=a+ib$ - власне значення. Відповідна власна функція нехай має вигляд $X(x)=u(x)+iv(x)$. Тоді $\overline{\lambda}=a-ib$ теж буде власним значенням і відповідна власна функція буде $X(x)=u(x)-iv(x)$, оскільки

$$u''\pm iv''-(a\pm ib)(u\pm iv)\equiv 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} u''-au+bv\equiv 0; \\ v''-av-bu\equiv 0. \end{cases}$$

Але тоді

$$\int_0^l \left[X(x)\overline{\lambda X(x)}-\overline{X(x)}\lambda X(x)\right]dx=\int_0^l \left(X(x)\overline{X''(x)}-\overline{X(x)}X''(x)\right)dx=(X\overline{X}'-\overline{X}X')\Big|_0^l=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \int_0^l \left[X(x)\overline{\lambda X}(x)-\overline{X}(x)\lambda X(x)\right]dx=-2ib\int_0^l (u^2+v^2)dx=0$$

звідки $b=0$.

Оскільки λ - дійсні числа, розглянемо далі окремі випадки:

а) нехай $\lambda>0$. Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння задачі (9) має вигляд

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}.$$

Підставивши його у межові умови, одержимо однорідну систему

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0, \\ A_1 e^{\sqrt{\lambda} l} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda} l} = 0. \end{cases}$$

Вона має нетривіальний розв'язок, тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулеві

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda} l} & e^{-\sqrt{\lambda} l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda} l} - e^{\sqrt{\lambda} l} = 0.$$

При всіх $\lambda > 0$ останній відмінний від нуля, тому будь-яке $\lambda > 0$ не є власним значенням задачі (9);

б) при $\lambda = 0$ загальний розв'язок рівняння задачі Щтурма-Ліувілля (9) має вигляд $X(x) = B_1 x + B_2$. З межових умов матимемо $B_2 = 0$, $B_1 l + B_2 = 0$. Звідки $B_1 = B_2 = 0$ і $X(x) \equiv 0$;

в) нехай $\lambda < 0$. Загальний розв'язок рівняння задачі (9) має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda} x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda} x.$$

Згідно з крайовими умовами одержимо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \sin\sqrt{-\lambda} l = 0.$$

Задача (9) буде мати нетривіальні розв'язки, якщо $C_2 \neq 0$, а $\sin\sqrt{-\lambda} l = 0$, тобто коли

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{10}$$

Власним значенням λ_n відповідають власні функції

$$X_n(x) = C_{2n} \sin\frac{\pi n}{l} x. \tag{11}$$

Вони визначаються з точністю до сталого множника, тому надалі будемо вважати, що $n \in \mathbb{N}$. З рівняння (8) отримаємо

$$T_n(t) = C_{3n} \cos\frac{\pi n a}{l} t + C_{4n} \sin\frac{\pi n a}{l} t. \tag{12}$$

Таким чином, ми отримали послідовність функцій

$$u_n(x,t)=\left(a_n\cos\frac{\pi na}{l}t+b_n\sin\frac{\pi na}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x\,,\quad a_n=C_{2n}C_{3n}\,,\quad b_n=C_{2n}C_{4n}\,. \tag{13}$$

$u_n(x,t)$ задовольняють рівнянню (1) і межовим умовам (2).

З послідовності (13) утворимо ряд:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{\pi na}{l}t+b_n\sin\frac{\pi na}{l}t\right]\sin\frac{\pi n}{l}x\,. \tag{14}$$

Він формально задовольняє рівнянню (1) і межовим умовам (2), оскільки кожна його складова – функція послідовності (13). Внесемо ряд (14) у початкові умови (3). В результаті, отримаємо:

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\ \sin\dfrac{\pi n}{l}x=\varphi(x);\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi na}{l}b_n\ \sin\dfrac{\pi n}{l}x=\psi(x).\end{cases}$$

Таким чином, a_n і b_n виражаються через коефіцієнти рядів Фур'є для функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx\,,\quad b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx\,. \tag{15}$$

Можна показати, що при певних умовах ряд (14) з коефіцієнтами (15) буде розв'язком межової задачі (1) – (3).

Теорема. Якщо $\varphi(x)$ - тричі кусково неперервно диференційована на відрізку $[0,l]$ функція і задовольняє умовам

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0\ , \tag{16}$$

а $\psi(x)$ - двічі кусково неперервно диференційована на відрізку $[0,l]$ функція і задовольняє умовам узгодженості (4), то функція $u(x,t)$, визначена рядом (14), має неперервні похідні до другого порядку включно і задовольняє рівнянню (1) і умовам (2), (3).