Потенціал простого шару

Розглянемо поле, що створює заряд розподілений по поверхні S з поверхневою густиною $\sigma(Q)$ (рис.1.).

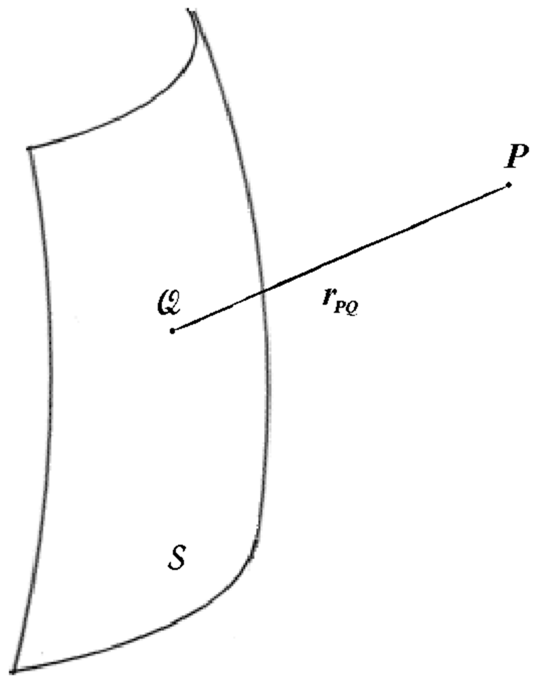

Рис.1.

Потенціал поля можна отримати так само, як ми це зробили у попередній лекції для об'єму або циліндричного тіла. Для цього необхідно кулонів потенціал помножити на елементарний заряд і проінтегрувати. У даному випадку інтеграл буде поверхневим

$$\varphi(P) = \iint_S \frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}} dS , \tag{1}$$

де r_{PQ} – відстань між точками P і Q. Права частина (1) називається **потенціалом простого шару**. У всіх точках $P(x, y, z)$, які не належать поверхні S , інтеграл (1) має похідні всіх порядків і задовольняє рівнянню Лапласа. Потенціал простого шару прямує до нуля на нескінченності як R^{-1}, де $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Потенціал простого шару (1) з неперервною густиною $\sigma(Q)$ є функцією, неперервною у всьому просторі.

Таким чином, в інтегралі (1) точка $P(x,y,z)$ може бути точкою поверхні S. Виберемо таку точку Q_0. Нехай $\vec{n}_0$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S в цій точці (рис. 2).

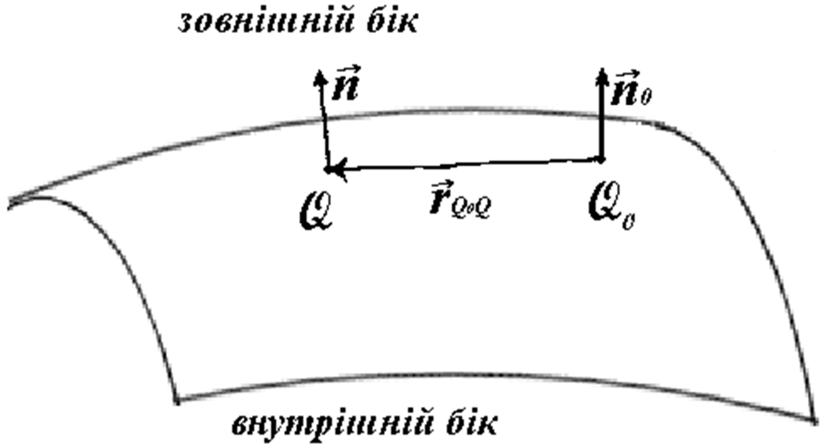

Рис.2.

Формально запишемо похідну від інтегралу (1) в точці Q_0 за напрямом $\vec{n}_0$. Від точки Q_0 залежить тільки множник $r_{Q_0Q}^{-1}$, і ми можемо диференціювати його під знаком інтегралу:

$$\iint_S \sigma(Q)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_0}\left(\frac{1}{r_{Q_0Q}}\right)dS = \iint_S \sigma(Q)\left[\frac{\partial r_{PQ}^{-1}(Q_0)}{\partial x}n_{0x} + \frac{\partial r_{PQ}^{-1}(Q_0)}{\partial y}n_{0y} + \frac{\partial r_{PQ}^{-1}(Q_0)}{\partial z}n_{0z}\right]dS =$$
$$= \iint_S \sigma(Q)\frac{\left(x_Q - x_{Q_0}\right)n_{0x} + \left(y_Q - y_{Q_0}\right)n_{0y} + \left(z_Q - z_{Q_0}\right)n_{0z}}{r_{Q_0Q}^3}dS = \iint_S \sigma(Q)\frac{\cos\left(\vec{r}_{Q_0Q},\vec{n}_0\right)}{r_{Q_0Q}^2}dS. \qquad (2)$$

Виявляється, що невласний інтеграл $\iint_S \sigma(Q)\frac{\cos\left(\vec{r}_{Q_0Q},\vec{n}_0\right)}{r_{Q_0Q}^2}dS$ збігається, а от похідна від функції $\varphi(P)$ в точці Q_0 за напрямом $\vec{n}_0$ терпить розрив:

$$\left(\frac{\partial u(Q_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_{зовн.} = \iint_S \sigma(Q)\frac{\cos\left(\vec{r}_{Q_0Q},\vec{n}_0\right)}{r_{Q_0Q}^2}dS + 2\pi\sigma(Q_0)$$ - похідна ззовні S (рис.2),

$$\left(\frac{\partial u(Q_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_{вн.} = \iint_S \sigma(Q)\frac{\cos\left(\vec{r}_{Q_0Q},\vec{n}_0\right)}{r_{Q_0Q}^2}dS - 2\pi\sigma(Q_0)$$ - похідна зсередини S (3)

Стрибок похідної за напрямом $\vec{n}_0$ від функції $\varphi(P)$ при перетині поверхні S в точці Q_0:

$$\left(\frac{\partial u(Q_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_{зовн.} - \left(\frac{\partial u(Q_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_{вн.} = 4\pi\sigma\left(Q_0\right).$$

З доведенням сформульованих тверджень можна ознайомитися в книзі (стор. 53-58)

Гюнтер Н. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953