Потенціали площі і об'єму

Теорія потенціалу з самого початку свого розвитку стосувалась дослідження властивостей сил всесвітнього тяжіння. Зокрема, ця теорія виявилася ефективною при визначенні сили тяжіння між матеріальною токою і масивним тілом скінченого розміру. Згодом стало зрозуміло, що методи теорії потенціалу можна застосовувати в електростатиці та магнетизмі. При розгляді теорії потенціалу (для ілюстрації передусім) будемо звертатися до задач електростатики і магнетизму.

З курсу фізики відомо, що електростатичне поле $\overline{E} = -grad\varphi$ одиничного точкового заряду, розміщеного в $Q(x_0, y_0, z_0)$, у точці $P(x, y, z)$ встановлюється законом Кулона: вектор напруженості електростатичного поля напрямлений вздовж лінії, що з'єднує точки P і Q, а його величина обернено пропорційна квадрату $R_{PQ} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ - відстані між вказаними точками (рис.1а). Опускаючи деталі нормування, потенціал поля точкового заряду виберемо у вигляді $\varphi = \frac{1}{R_{PQ}}$.

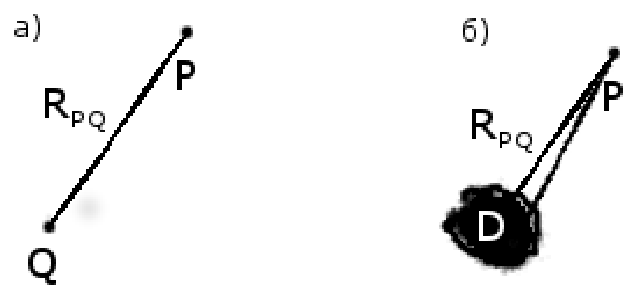

Рис.1.

Якщо заряди розподілені по якомусь об'єму D (рис.1б) з об'ємною густиною $\rho(x, y, z)$. В курсі "Теорія поля" було встановлено, що скалярний потенціал φ повинен задовольняти рівнянню Пуассона, яке є лінійним диференціальним рівнянням другого порядку у частних похідних:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho(Q).$$

Враховуючи лінійність, можна припустити справедливість принципу суперпозції: електричне поле в точці $P(x, y, z)$, що лежить за межами D, визначається сумою полів, створених окремо кожним точковим зарядом, розміщеним в D. Оскільки використовується неперервний розподіл зарядів по об'єму, під словом"сума" потрібно розуміти інтеграл по об'єму:

$$\varphi(P) = \int_D \frac{\rho(Q)}{R_{PQ}} dV_Q. \tag{1}$$

Інтеграл (1) будемо називати потенціалом об'єму.

Компоненти векторного потенціалу $\overline{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$ стаціонарного магнітного поля $\overline{H} = rot\,\overline{A}$, яке виникає під дією струмів об'ємної щільності $\bar{j}(x, y, z)$, також задовольняє рівнянням Пуассона:

$$\Delta\overline{A} = 4\pi\bar{j}(x, y, z),$$

тому $\overline{A}(P) = \int_D \frac{\bar{j}(Q)}{R_{PQ}} dV_Q$.

З курсу електростатики також відомо, що при певному нормуванні потенціал електростатичного поля нескінченної рівномірно зарядженої нитки з одиничною лінійною щільністю заряду має вигляд:

$$\varphi = ln\frac{1}{R_{PQ}}. \tag{2}$$

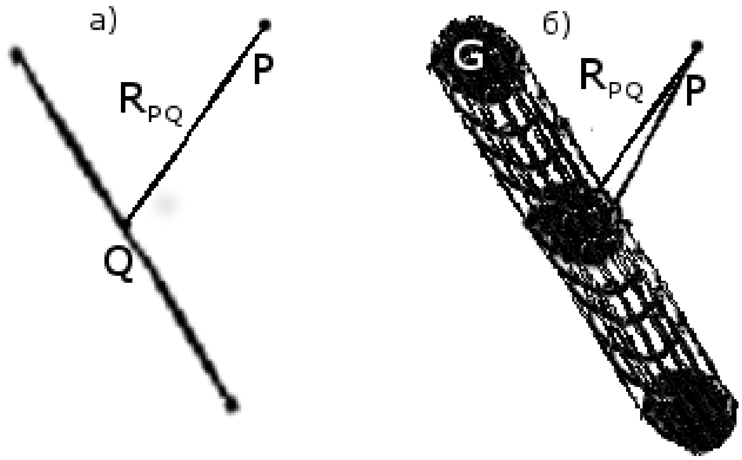

Рис.2.

У цьому випадку задача є плоскою, оскільки функція φ і поле $\overline{E} = -grad\varphi$ не залежать від координати вздовж нитки, положення якої можна задавати точкою Q з координатами (x_0, y_0). Тоді в (2) $R_{PQ} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ - відстань між ниткою і точкою $P(x, y)$, в якій поле визначається (рис.2а).

Якщо маємо заряджене з лінійною щільністю $\tau(Q)$ нескінченне циліндричне тіло (рис.2б), поперечний переріз якого є двовимірною областю G, тоді поле, створюване ним, можна визначити за допомогою двократного інтегралу:

$$\varphi(P) = \iint_G \tau(Q) ln \tfrac{1}{R_{PQ}} dxdy \,. \qquad (3)$$

Інтеграл (3) називається потенціалом площі. При цьому $\varphi(P)$ задовольняє рівнянню $\Delta\varphi = -2\pi\tau(x, y)$.

Інтеграли (2) і (3) стають невласними інтегралами другого роду, що залежать від параметру, якщо точка P знаходиться в області інтегрування. У зв’язку з цим варто пригадати оновні властивості інтегралів виду:

$$I(P)=\int_D F(P,Q)f(Q)dV_Q, \tag{4}$$

де $F(P,Q)$ - функція, яка має розрив другого роду при $P=Q$; $f(Q)$ - обмежена функція.

Визначення 1. Інтеграл $I(P)$ називається таким, що збігається рівномірно в точці P_0, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon)>0$, що нерівність

$$\left|\int_{D_{\delta(\varepsilon)}} F(P,Q)f(Q)dV_Q\right|<\varepsilon$$

виконується для будь-якої точки $P\in K_{\delta(\varepsilon)}^{P_0}$ і для будь-якої області $D_{\delta(\varepsilon)}\subseteq K_{\delta(\varepsilon)}^{P_0}$, де $K_{\delta(\varepsilon)}^{P_0}$ - куля радіусом $\delta(\varepsilon)$ з центром в точці P_0.

Теорема 1. Якщо інтеграл $I(P)$ збігається рівномірно в точці P_0, то він є неперервною в точці P_0 функцією.

Таким чином, маємо **властивість потенціалів площі і об'єму.** Якщо інтеграли (1) і (3) збігається рівномірно в точці P_0, то вони є неперервними в точці P_0 функціями.

Очевидно, що рівномірна збіжність інтегралів (1), (3) і (4) залежить від закону розподілу заряду по об'єму або площі. Нас буде цікавити не тільки неперервність потенціалів, але й гладкість, тобто їхні диференціальні властивості. У зв'язку з цим важливою є наступне твердження.

Теорема 2. Якщо $\rho(Q)$ в (1) (або $\tau(Q)$ в (3)) є один раз неперервно диференційованою в області D та на її межі функцією, то інтеграл (1) (відповідно (3)) визначений для усіх P. При цьому в додатковій до D області (все, що знаходиться за межею області D) функція $\varphi(Q)$ має похідні усіх порядків та задовольняє рівнянню Лапласа $\Delta\varphi(Q)=0$, а в області D функція $\varphi(Q)$ є двічі неперервно диференційованою і задовольняє рівнянню Пуассона для потенціалу об'єма $\Delta\varphi = -4\pi\rho(Q)$ (для потенціалу площі $\Delta\varphi = -2\pi\tau(Q)$).

З доведенням цієї теореми та інших теорем, пов'язаних з властивостями потенціалів площі і об'єму можна ознайомитися на стор. 96-120 в монографії

Гюнтер Н. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953