Приведення диференціального рівняння в частинних похідних до канонічного вигляду. Класифікація диференціальних рівнянь у частинних похідних

Спочатку розглянемо квазілінійне д.р. у ч.п. 2-го порядку від двох незалежних змінних

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y). \qquad (1)$$

Зробимо невироджене взаємнооднозначне перетворення змінних:

$\xi = \phi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ ($x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$ - обернене перетворення). (2)

де $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ - двічі неперервно диференційовані функції, для яких

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Спробуємо вибрати функції $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ таким чином, щоб рівняння (1) у координатах (ξ,η) мало найпростіший вигляд. Оскільки

$$u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = u(\xi,\eta), \quad u_x = u_x(\xi(x,y),\eta(x,y)) = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x ,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \; u_{xy} = \left(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x\right)'_y = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_{\eta\xi}\eta_x\xi_y + u_\eta \eta_x,$$

$$u_{xx} = \left(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x\right)'_x = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi \xi_{xx} + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_{\eta\xi}\eta_x\xi_x + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{yy} = \left(u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y\right)'_y = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_\xi \xi_{yy} + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_{\eta\xi}\eta_y\xi_y + u_\eta \eta_{yy},$$

то рівняння (1) матиме вигляд

$$\alpha_{11}u_{\xi\xi} + 2\alpha_{12}u_{\xi\eta} + \alpha_{22}u_{\eta\eta} = F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta), \qquad (2)$$

де

$\alpha_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$, $\alpha_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y$, $\alpha_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2.$

Спробуємо вибрати $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ так, щоб $\alpha_{11} = \alpha_{33} = 0$. Для цього функції $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ повинні бути розв'язками рівняння

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0. \qquad (3)$$

Нехай коефіцієнти (1) є двічі неперервно диференційованими функціями і не перетворюються одночасно в нуль. Нехай $a_{11} \neq 0$ (випадок $a_{22} \neq 0$ розглядається аналогічно), тоді (3) можна записати у вигляді

$$\left[a_{11}z_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_y\right]\left[a_{11}z_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_y\right] = 0,$$

де $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. Звідки отримуємо пару незалежних (не систему!!!) рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}z_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_y = 0, \\ a_{11}z_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_y = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Складемо відповідні рівнянням (4) звичайні диференціальні рівняння

$$\frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} + \sqrt{\Delta}}, \quad \frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} - \sqrt{\Delta}}, \tag{5}$$

які називаються характеристичними.

З диференціальних рівнянь у чанних похідних першого порядку відомо, що якщо $c = \varphi(x, y)$ є загальним інтегралом одного із рівнянь (5), то $z = \varphi(x, y)$ є розв'язком відповідного з рівнянь (4), і навпаки.

В залежності від знаку дискримінанту $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ диференціальні рівняння виду (1) поділяють на три групи:

1) рівняння гіперболічного типу, якщо $\Delta > 0$;
2) рівняння параболічного типу, якщо $\Delta = 0$;
3) рівняння еліптичного типу, якщо $\Delta < 0$.

Рівняння гіперболічного типу. У випадку рівнянь гіперболічного типу $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ в розглядуваній області. Рівняння (5) мають два незалежних дійсних загальних інтеграли $C_1 = \xi(x, y)$, $C_2 = \eta(x, y)$.

Візьмемо

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \tag{6}$$

тоді $\alpha_{11} \equiv 0$ і $\alpha_{22} \equiv 0$, а рівняння (2) матиме вигляд

$$u_{\xi\eta}(\xi, \eta) = -\frac{F\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right)}{2\alpha_{12}}. \tag{7}$$

Рівняння параболічного типу $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$**.** Оскільки $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$, то

$$\alpha_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$
$$= \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right).$$

Рівняння (5) співпадають, тому маємо лише один загальний інтеграл $C_1 = \xi(x, y)$. Візьмемо

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

$\eta(x, y)$ – довільна два рази неперервно диференційована функція, незалежна від $\xi(x, y)$. Враховуючи, що $\alpha_{11} = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0$, $\alpha_{12} = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0$.

Таким чином, рівняння (2) матиме вигляд

$$u_{\eta\eta}(\xi, \eta) = \frac{F\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right)}{\alpha_{22}}. \tag{8}$$

Рівняння еліптичного типу $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. Рівняння (5) мають комплексні коефіцієнти. Введемо нову функцію

$$z(x, y) = \zeta(x, y) + i\omega(x, y). \tag{9}$$

Тоді матимемо

$$a_{11}(\zeta_x + i\omega_x) + (a_{12} + i\sqrt{|\Delta|})(\zeta_y + i\omega_y) = 0,$$
$$a_{11}(\zeta_x + i\omega_x) + (a_{12} - i\sqrt{|\Delta|})(\zeta_y + i\omega_y) = 0$$

або

$$\begin{cases} a_{11}\zeta_x + a_{12}\zeta_y \mp \sqrt{|\Delta|}\,\omega_y = 0; \\ a_{11}\omega_x + a_{12}\omega_y \pm \sqrt{|\Delta|}\,\zeta_y = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Система (10) є системою лінійних однорідних д.р. у ч.п. 1-го порядку. Її розв'язком є функції $\zeta = \zeta(x, y), \omega = \pm\omega(x, y)$. Тоді загальними інтегралами рівнянь (5) будуть вирази $C_{1,2} = \zeta(x, y) \pm i\omega(x, y)$.

Позначимо $\xi = \zeta(x, y) + i\omega(x, y)$, $\eta = \zeta(x, y) - i\omega(x, y)$, тоді, якщо ввести нові змінні

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2} = \zeta(x, y), \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2i} = \omega(x, y), \tag{11}$$

матимемо для (2) остаточний вигляд

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \frac{F\left(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta\right)}{\alpha_{11}}. \tag{12}$$

Рівняння (7), (8), (12) називаються канонічними формами квазілінійного д.р. у ч.п. 2-го порядку для дійсної функції з двома незалежними змінними (1).

Нехай тепер невідома функція залежить від змінних, кількість яких більше, ніж дві:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} = f\left(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}\right). \tag{13}$$

Припустимо, що $a_{ij} = a_{ji}$ - сталі. У рівнянні (13) зробимо невироджену лінійну заміну змінних за формулами

$$\xi_k = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{kl} x_l, \quad k = \overline{1, n}, \tag{14}$$

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} \alpha_{ki}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k \xi_l} \alpha_{ki} \alpha_{lj}.$$

В результаті, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{a}_{kl} u_{\xi_k \xi_l} = F\left(\xi, u, u_{\xi_1}, \ldots, u_{\xi_n}\right), \tag{15}$$

де $\overline{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_{ki} \alpha_{lj}$. Розглянемо квадратичну форму $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Під дією перетворення (14) вона переходить в $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} \xi_i \xi_j$, тобто коефіцієнти квадратичної форми перетворюються так само, як і коефіцієнти д.р. у ч.п. (13). Відповідним вибором коефіцієнтів α_{ij} квадратичну форму можна звести до канонічного вигляду, тобто записати у вигляді $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2$. Рівняння (13) тоді у нових змінних матиме вигляд

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{\xi_k \xi_k}(\xi_1, \ldots., \xi_n) = F(\xi_1, \ldots., \xi_n, u, u_{\xi_1}, \ldots, u_{\xi_n}). \tag{16}$$