Функція Гріна крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

У цьому розділі розглянемо крайову (або межову) задачу для диференціального рівняння другого порядку

$$y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=f(t)\,; \tag{1}$$

$$\begin{cases}\alpha_1 y'(a)+\beta_1 y(a)=0;\\ \alpha_2 y'(b)+\beta_2 y(b)=0.\end{cases} \tag{2}$$

Якщо в (2) $\alpha_1=\alpha_2=0$, задача (1), (2) називається крайовою задачею першого роду (задача Діріхле). Якщо в (2) $\beta_1=\beta_2=0$, задача (1), (2) називається граничною задачею другого роду (задача Неймана). У загальному випадку задача (1), (2) називається третьою крайовою задачею.

Помножимо рівняння (1) на $\mu(t)=e^{\int p(t)dx}$. Оскільки

$$e^{\int p(t)dt}y''(t)+p(t)e^{\int p(t)dt}y'(t)=\left(e^{\int p(t)dt}y'(t)\right)'=\left(\mu(t)y'(t)\right)',$$

то $\mu(t)\left(y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)\right)=\left(\mu(t)y'(t)\right)'+\mu(t)q(t)y(t)=\mu(t)f(t)$. Роблячи позначення $\mu(t)q(t)=-\vartheta(t)$ і $\mu(t)f(t)=\varphi(t)$, межову задачу (1), (2) перепишемо у вигляді:

$$\left(\mu(t)y'(t)\right)'-\vartheta(t)y(t)=\varphi(t)\,; \tag{1'}$$

$$\begin{cases}\alpha_1 y'(a)+\beta_1 y(a)=0;\\ \alpha_2 y'(b)+\beta_2 y(b)=0.\end{cases} \tag{2'}$$

Рівняння (1) або (1’) можуть моделювати рівняння руху матеріальної точки, коливальний процес або щось інше. Права частина цих рівнянь – зовнішня сила, яка підтримує рух. Існує кілька методів розв’язання межової задачі (1), (2). У цьому розділі ми зробимо це за допомогою побудови функції відгуку на миттєву силу, що діяла в момент t':

$$\left(\mu(t)G'(t,t')\right)'-\vartheta(t)G(t,t')=\delta(t-t')\,; \tag{1''}$$

$$\begin{cases}\alpha_1 G'(a,t')+\beta_1 G(a,t')=0;\\ \alpha_2 G'(b,t')+\beta_2 G(b,t')=0.\end{cases} \tag{2''}$$

Побудуємо розв'язки двох допоміжних задач Коші:

$$\begin{cases}\left(\mu(t)u'(t)\right)'-\vartheta(t)u(t)=0,\\ u'(a)=\beta_1,\quad u(a)=-\alpha_1.\end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases}\left(\mu(t)v'(t)\right)'-\vartheta(t)v(t)=0,\\ v'(b)=\beta_2,\quad v(b)=-\alpha_2.\end{cases}$$

Оскільки $\left(\mu(t)\begin{vmatrix}u(t) & v(t)\\ u'(t) & v'(t)\end{vmatrix}\right)'=\left(\mu(t)\left[u(t)v'(t)-v(t)u'(t)\right]\right)'=0$, то $\mu(t)\begin{vmatrix}u(t) & v(t)\\ u'(t) & v'(t)\end{vmatrix}=C$.

$C = const \neq 0$, тому що інакше було б $u(t) = C_1 v(t)$, де C_1– стала, а це означало б існування нескінченної кількості нетривіальних розв'язків однорідної крайової задачі і множинність розв'язків неоднорідної (1), (2).

Будемо шукати функцію відгуку методом невизначених коефіцієнтів

$$G(t,t') = c_1(t,t')u(t) + c_2(t,t')v(t) . \tag{3}$$

Диференціюючи (3), матимемо

$$G'(t,t') = \underbrace{c_1'(t,t')u(t) + c_2'(t,t')v(t)}_{=0} + c_1(t,t')u'(t) + c_2(t,t')v'(t) . \tag{4}$$

В результаті підстановки (3), (4) в (1’’), отримаємо невироджених лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} c_1'(t,t')u(t) + c_2'(t,t')v(t) = 0; \\ \mu(t)\left[c_1'(t,t')u'(t) + c_2'(t,t')v'(t)\right] = \delta(t-t'). \end{cases} \tag{5}$$

Розв’язок системи (5) легко знайти за допомогою методу Крамера:

$$c_1'(t,t') = -\frac{v(t)\delta(t-t')}{C}, \quad c_2'(t,t') = \frac{u(t)\delta(t-t')}{C} . \tag{6}$$

Інтегруючи (6) по t, матимемо

$$c_1(b,t') - c_1(t,t') = -\int_t^b \frac{v(\tau)\delta(\tau-t')}{C} d\tau = \begin{cases} 0, & t > t'; \\ -\dfrac{v(t')}{C}, & t \leq t', \end{cases}$$

$$c_2(t,t') - c_2(a,t') = \int_a^t \frac{u(\tau)\delta(\tau-t')}{C} d\tau = \begin{cases} \dfrac{u(t')}{C}, & t \geq t'; \\ 0, & t < t'. \end{cases}$$

Звідки

$$G(t,t') = c_1\left(b,t'\right)u(t) + c_2(a,t')v(t) + \begin{cases} \dfrac{u(t')v(t)}{C}, & t \geq t'; \\ \dfrac{u(t)v(t')}{C}, & t \leq t'. \end{cases}$$

При підстановці $G(t,t')$ до межових умов (2'') отримаємо, що $c_1(b,t') = c_2(a,t') = 0$.

Таким чином,

$$G(t,t') = \begin{cases} \dfrac{u(t')v(t)}{C}, & t \geq t'; \\ \dfrac{u(t)v(t')}{C}, & t \leq t'. \end{cases} \tag{7}$$

Функцію $G(t,t')$ прийнято називати функцією Гріна.

Властивості функції Гріна:

а) функція Гріна неперервна на $[a,b]$;

б) на кожному з інтервалів $[a,t'],[t',b]$ двічі неперервно диференційована і задовольняє рівнянню (1’’) і межовим умовам (2’’);

в) $\left.\dfrac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=t'+0} - \left.\dfrac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=t'-0} = \dfrac{1}{\mu(t)}$;

г) функція Гріна є симетричною функцією, тобто $G(t,t') = G(t',t)$.

Доведемо властивість в). Оскільки

$$\frac{\partial G(t,t')}{\partial t}=\begin{cases}\dfrac{u(t')v'(t)}{C}, & t>t';\\ \dfrac{u'(t)v(t')}{C}, & t<t',\end{cases}$$

то

$$\left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=t'+0}-\left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=t'-0}=\frac{u(t')v'(t')-v(t')u'(t')}{\mu(t')\left[u(t')v'(t')-v(t')u'(t')\right]}=\frac{1}{\mu(t')}.$$

Повернімось тепер до задачі (1), (2). Виявляється, що її розв'язок можна побудувати за допомогою функції Гріна:

$$y(t)=\int_a^b G(t,t')\varphi(t')dt'. \tag{8}$$

Формула є аналітичним виразом принципу суперпозиції, який справедливий для лінійних моделей фізичних процесів.

Наостанок відзначимо, що у неоднорідні межові умови

$$\begin{cases}\alpha_1 y'(a)+\beta_1 y(a)=A;\\ \alpha_2 y'(b)+\beta_2 y(b)=B\end{cases} \tag{2'''}$$

можна звести до однорідних (2). Для цього потрібно зробити заміну:

$$y(x)=z(x)+\frac{(A-B)\,x}{\alpha_1-\alpha_2+\beta_1 a-\beta_2 b}+\frac{(\alpha_1+\beta_1 a)\,B-(\alpha_2+\beta_2 b)\,A}{\alpha_1-\alpha_2+\beta_1 a-\beta_2 b}.$$